

"Stochastic modelling and derivatives in traditional markets and in crypto-markets"

DU Financial Engineering

SU (Sorbonne Université) - X (Ecole polytechnique)

Emmanuel Gobet (Cours et TD)

Table des matières

1	Problématique de calibration	3
2	EDP de pricing, portefeuille markovien, modèle de Dupire	4
2.1	EDP de pricing	4
2.2	Modèle de volatilité à la Dupire	7
2.3	Projection markovienne (à la Gyongy '86)	8
3	Paramétrisation des surfaces de volatilité implicite	10
3.1	Notations	10
3.2	Conditions de non-arbitrage statique	11
3.3	Comportement des ailes : Wing's formula (Lee '05)	12
3.4	Modèle SVI à maturité fixe (<i>Raw SVI</i>)	13
3.5	Modèle Surface SVI (dit <i>modèle SSVI</i>)	14

1 Problématique de calibration

Moindres carrés : A partir de prix d'options vanilles cotées, trouver un modèle $\mathcal{M}$ et ses paramètres θ permettant de retrouver au mieux les prix de call/put de marché :

$$\inf_{\theta} \sum_i \left(\text{Prix}^{\mathcal{M}, \theta}(T_i, K_i) - \text{Prix}^{\text{market}}(T_i, K_i) \right)^2$$

- Nécessité de pouvoir calculer les prix call/put rapidement dans le modèle $\mathcal{M}$: EDP, formules approchées...
- Parfois le modèle $\mathcal{M}$ de sous-jacent est remplacé par un modèle de volatilité implicite (SVI, SSVI)
- En général, problème d'optimisation non convexe, qui a de nombreux minima locaux $\Rightarrow$ non unicité du minimum (stabilité dynamique recherchée)
- Pondération possible en fonction de la liquidité dépendante de T, K

2 EDP de pricing, portefeuille markovien, modèle de Dupire

2.1 EDP de pricing

Théorème. Contexte :

- d actifs négociables, taux de dividende/repo q
- Dynamique sous $\mathbb{P}$ avec volatilité locale :

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = \mu_t^i dt + \sigma_i(t, S_t^i) d\widehat{W}_t$$

- Taux d'intérêt déterministe r_t .
- Flux $\Psi(S_T)$

Alors le prix du flux satisfait à $C_t(\Psi(S_T), T) = v(t, S_t)$ avec v solution de l'EDP

$$\begin{cases} \partial_t v(t, S) + \sum_{i=1}^d (r_t - q_i) S_i \partial_{S_i} v(t, S) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sigma_i(t, S) \cdot \sigma_j(t, S) S_i S_j \partial_{S_i S_j}^2 v(t, S) - r_t v(t, S) = 0, \\ v(T, S) = \Psi(S). \end{cases}$$

La couverture en les d actifs est $(\delta_t^1, \dots, \delta_t^d) = (\partial_{S^1} v(t, S_t), \dots, \partial_{S^d} v(t, S_t))$.

Exemple (call dans un modèle à volatilité locale). EDP dans les variables backward (t, S) . La fonction prix $v : (t, S) \mapsto \text{Call}(t, S, T, K)$ (à T, K fixés) est solution à

$$\begin{cases} \partial_t v(t, S) + (r_t - q)S \partial_S v(t, S) + \frac{1}{2} [\sigma(t, S)S]^2 \partial_S^2 v(t, S) - r_t v(t, S) = 0 \\ \text{pour } t \in [0, T], S > 0, \\ v(T, S) = (S - K)_+. \end{cases}$$



Pour un chaque (T, K) , une EDP différente $\Rightarrow$ coûteux en temps calcul.

EDP de Dupire (EDP dans les variables forward (T, K))

La fonction prix $u : (T, K) \mapsto \text{Call}(t, S, T, K)$ (à t, S fixés) est solution à

$$\begin{cases} \partial_T u(T, K) = (q - r_T)K \partial_K u(T, K) + \frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 \partial_K^2 u(T, K) - qu(T, K) \\ \text{pour } T \geq t, K > 0, \\ u(t, K) = (S - K)_+. \end{cases}$$



Pour une condition de marché (t, S) , une EDP pour tous les strikes et maturités à la fois !

2.2 Modèle de volatilité à la Dupire

Théorème (vol à la Dupire). Etant donnée une nappe de prix de marché $\{\text{Call}_{t_0}^{\text{mkt}}(T, K) : T \geq t_0, K\}$ observés à t_0 , le modèle $\mathcal{M}$ avec volatilité locale décrit (en risque-neutre) par

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - q)dt + \sigma(t, S_t)dW_t$$

donne à nouveau les prix de marché (à tous strikes et toutes maturités)

$$\text{Call}^{\sigma^{\text{Dupire}}}(t_0, S_{t_0}, T, K) = \text{Call}_{t_0}^{\text{mkt}}(T, K)$$

à condition que la volatilité locale soit

$$[\sigma^{\text{Dupire}}]^2(T, K) = 2 \frac{\partial_T \text{Call}_{t_0}^{\text{mkt}}(T, K) + q \text{Call}_{t_0}^{\text{mkt}}(T, K) + (r - q)K \partial_K \text{Call}_{t_0}^{\text{mkt}}(T, K)}{K^2 \partial_K^2 \text{Call}_{t_0}^{\text{mkt}}(T, K)}.$$

1. Attention, la volatilité de Dupire dépend de l'instant de calibration (càd t_0)
2. En pratique, nécessaire d'interpoler les prix observés sur une grille de strikes et maturités pour avoir les dérivées $\partial_T, \partial_K, \partial_K^2$.

2.3 Projection markovienne (à la Gyongy '86)

Pour faire simple $r = q = 0$.

Théorème. Considérons deux modèles de titres :

- le premier avec une volatilité aléatoire (locale, stochastique, locale-stoch,...)

$$\frac{d\mathbf{X}_t}{\mathbf{X}_t} = \sigma_t d\mathbf{W}_t,$$

- le second avec une volatilité locale $\frac{d\mathbf{Y}_t}{\mathbf{Y}_t} = \sigma(t, \mathbf{Y}_t) d\mathbf{B}_t,$

alors si $\mathbf{X}_0 = \mathbf{Y}_0$ et si $\sigma(t, \mathbf{y}) = \sqrt{\mathbb{E}[|\sigma_t|^2 \mid \mathbf{X}_t = \mathbf{y}]}$, les deux modèles donnent les mêmes lois marginales :

$$\text{loi}(\mathbf{X}_t) = \text{loi}(\mathbf{Y}_t), \quad \forall t \geq 0.$$

Conséquence : à $t = 0$, les prix de call/put dans les 2 modèles sont identiques !

▮► Modèles indiscernables à partir des prix de call/put observés à une date donnée.

Exemple (Heston vs volatilité locale). Le modèle de Heston

$$\frac{dX_t}{X_t} = \sqrt{V_t} dW_t, \quad dV_t = \theta(V_\infty - V_t)dt + \xi \sqrt{V_t} dB_t$$

et le modèle à volatilité locale

$$\frac{dY_t}{Y_t} = \sigma(t, Y_t) dB_t$$

donnent les mêmes prix d'options vanilles (à $t = 0$) dès que

$$X_0 = Y_0, \quad \sigma(t, y) = \sqrt{\mathbb{E}[V_t \mid X_t = y]}.$$

Exemple (Local-Stoch vol model calibré au prix de marché). [Guyon, Henry-Labordère '12]

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma^{\text{Dupire}}(t, S_t) \frac{\sqrt{V_t}}{\sqrt{\mathbb{E}[V_t \mid S_t]}} dW_t$$

pour tout processus de variance stochastique V .

3 Paramétrisation des surfaces de volatilité implicite

[Gatheral '06 ; Gatheral, Jacquier '14 ; . . .]

3.1 Notations

On introduit les variables

- i) $m = \frac{K}{F(t,T)}$, la moneyness
- ii) $k = \log(m)$, la log-moneyness
- iii) $\tau = T - t$, le temps jusqu'à maturité de l'option.

On définit la volatilité implicite dans les variables moneyness et maturité par

$$I_t(m, \tau) := \Sigma_t^{\text{IV}}(K, T).$$

Introduisons la *variance implicite totale* comme fonction de la variable log-moneyness :

$$w_t(k, \tau) := I_t^2(e^k, \tau) \times \tau.$$

3.2 Conditions de non-arbitrage statique

Définition. Une surface de volatilité implicite est dite libre d'arbitrage statique (à la date t) si deux conditions sont satisfaites :

- i) elle est libre d'arbitrage *calendar spread* ;
- ii) elle est libre d'arbitrage *butterfly* pour chaque maturité.

Conditions équivalentes à

- i) $\partial_\tau w_t(k, \tau) \geq 0$, pour tout $k \in \mathbb{R}$ et $\tau > 0$,
- ii) $g_t(k) := \left(1 - \frac{k \partial_k w_t(k, \tau)}{2w_t(k, \tau)}\right)^2 - \frac{(\partial_k w_t(k, \tau))^2}{4} \left(\frac{1}{w_t(k, \tau)} + \frac{1}{4}\right) + \frac{\partial_{kk}^2 w_t(k, \tau)}{2} \geq 0$,
pour tout $k \in \mathbb{R}$, et $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(-\frac{k}{\sqrt{w_t(k, \tau)}} + \frac{1}{2} \sqrt{w_t(k, \tau)}\right) = -\infty$.

3.3 Comportement des ailes : Wing's formula (Lee '05)

Comportement de toute variance implicite.

Aile Droite. Pour $K = F(0, T) \times e^k \rightarrow +\infty$, on a

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{w_0(k, \tau)}{k} = \beta_R = 2 - 4 \left(\sqrt{p_R^2 + p_R} - p_R \right) \in [0, 2],$$

avec $p_R = \sup \{ p \geq 0 : \mathbb{E}(S_T^{1+p}) < +\infty \}.$

Aile Gauche. Pour $K = F(0, T) \times m \rightarrow 0$, on a

$$\limsup_{k \rightarrow -\infty} \frac{w_0(k, \tau)}{|k|} = \beta_L = 2 - 4 \left(\sqrt{p_L^2 + p_L} - p_L \right) \in [0, 2],$$

avec $p_L = \sup \left\{ p \geq 0 : \mathbb{E}(S_T^{-p}) < +\infty \right\}.$



Propriétés vraies en grande généralité sur le modèle de sous-jacent. Mais les approximations sont bonnes pour des strikes très très éloignés...

Dans tous les cas, le comportement asymptotique en $\sqrt{|\log(m)|}$ donne des idées de paramétrisation. de volatilité implicite...

3.4 Modèle SVI à maturité fixe (*Raw SVI*)

SVI= Stochastic Volatility Inspired (provient des asymptotiques en longue maturité dans le modèle de Heston) [**Gatheral '04**; **Gatheral, Jacquier '11**].

On pose

$$w_0(\tau, k) := a_\tau + b_\tau \left\{ \rho_\tau (\log(m) - m_\tau) + \sqrt{(\log(m) - m_\tau)^2 + \sigma_\tau^2} \right\}, \quad (\text{SVI})$$

avec des coefficients réels $a_\tau, b_\tau, \rho_\tau, m_\tau, \sigma_\tau$ dépendant de la maturité résiduelle et du temps courant $t = 0$.

Restriction sur les paramètres pour avoir positivité et croissance comme dans les formules des ailes :

$$\sigma_\tau > 0,$$

$$b_\tau > 0,$$

$$\rho_\tau \in [-1, 1],$$

$$a_\tau + b_\tau \sigma_\tau \sqrt{1 - \rho_\tau^2} > 0,$$

$$b_\tau (1 + |\rho_\tau|) \leq 2.$$

Hélas les conditions de non-arbitrage statique (condition ii) du slide 11) ne s'écrivent pas de manière explicite en termes de paramètres $a_\tau, b_\tau, \rho_\tau, m_\tau, \sigma_\tau$.

3.5 Modèle Surface SVI (dit *modèle SSVI*)

Re-paramétrisation de SVI qui a l'avantage d'exclure les arbitrages statiques :

$$w_0(k, \tau) := \frac{\theta_\tau}{2} \left\{ 1 + \rho \varphi(\theta_\tau) k + \sqrt{(\varphi(\theta_\tau) k + \rho)^2 + (1 - \rho^2)} \right\} \quad (\text{SSVI})$$

avec $\theta_\tau > 0$, $\varphi(\theta_\tau) > 0$, $\rho \in (-1, 1)$.

Rôle de paramètres :

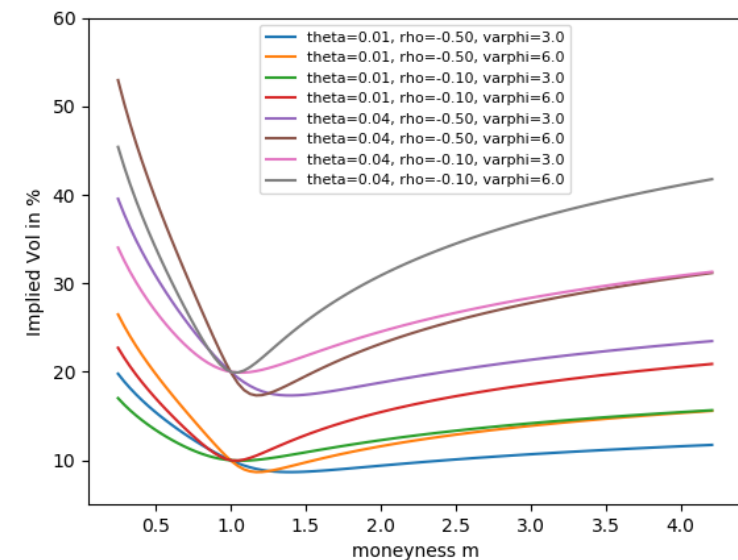
1. Variance implicite totale ATM :

$$w_0(k, \tau) \big|_{k=0} = \theta_\tau.$$

2. Skew de volatilité implicite ATM :

$$\partial_k I_0(k, \tau) \big|_{k=0} = \frac{\rho \sqrt{\theta_\tau}}{2\sqrt{\tau}} \varphi(\theta_\tau).$$

3. Smile de volatilité symétrique si et seulement si $\rho = 0$



Volatilité implicite pour différents paramètres $\theta, \rho, \varphi(\theta)$

Conditions de non arbitrage statique (faciles à vérifier sur les paramètres)

1. la condition d'absence de *calendar spread arbitrage* est équivalente à

$$\partial_\tau \theta_\tau \geq 0 \quad \text{pour tout } \tau \geq 0,$$

$$0 \leq \partial_\theta(\theta\varphi(\theta)) \leq \frac{1}{\rho^2} \left(1 + \sqrt{1 - \rho^2}\right) \varphi(\theta) \quad \text{pour tout } \theta > 0;$$

2. la condition d'absence de *butterfly arbitrage* est assurée dès que

$$\theta\varphi(\theta)(1 + |\rho|) < 4 \quad \text{pour tout } \theta > 0,$$

$$\theta\varphi^2(\theta)(1 + |\rho|) \leq 4 \quad \text{pour tout } \theta > 0.$$

Exemples.

- SSVI à la Heston : $\varphi(\theta) = \frac{1}{\lambda_t \theta} \left(1 - \frac{1 - e^{-\lambda_t \theta}}{\lambda_t \theta}\right)$, avec $\lambda_t \geq (1 + |\rho_t|)/4$.
- SSVI en loi puissance : $\varphi(\theta) = \frac{\eta_t}{\theta^\gamma (1 + \theta)^{1-\gamma}}$ avec $\gamma \in (0, \frac{1}{2}]$ et $\eta_t(1 + |\rho_t|) \leq 2$.